Universität Potsdam

Arithmetik und ihre Didaktik

Immer der Reihe nach. Dann Geometrische Reihen … in der Arithmetik.

© 2011–2020 Ulrich Kortenkamp, Universität Potsdam

Multiplikation – Grundvorstellungen

Was bedeutet „mal q“?

- Etwas q mal machen
- Etwas q mal nebeneinander liegen haben
- …
- **Etwas um einen Faktor q skalieren***

*) das kann vergrößern oder verkleinern sein – wenn $0 < q < 1$ ist, dann verkleinern wir

Geometrische Folgen

Wird eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bei jedem Schritt um den gleichen **Faktor** q verändert, dann nennt man diese Zahlenfolge eine **geometrische Folge**.

Beginnen wir mit a_0, dann ist $a_1 = a_0 \cdot q$.

Das nächste Folgenglied ist wieder das q-fache, also ist $a_2 = a_1 \cdot q = a_0 \cdot q \cdot q = a_0 \cdot q^2$, und so weiter.

$$\text{Es gilt also: } a_k = a_0 \cdot q^k$$

Damit ist auch der **geometrische Mittelwert** sinnvoll:

$$\text{Es gilt: } a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}} = (a_{k-1} \cdot a_{k+1})^{\frac{1}{2}} \text{ denn } a_{k+1} = q^2 a_{k-1}$$

Geometrischer Mittelwert

Der Geometrische Mittelwert zweier Zahlen a und b ist die Wurzel aus ihrem Produkt:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{geom}}(a, b) = \sqrt[2]{a \cdot b}$$

Dieser Mittelwert hat eine besondere Anwendung in der Zins- und Zinseszinsrechnung.

Angenommen, Sie möchten drei Sparverträge vergleichen:

- Bei Sparvertrag A erhalten Sie im ersten Jahr $1\,\%$ und im zweiten Jahr $3\,\%$ Zinsen.
- Bei Sparvertrag B erhalten Sie in beiden Jahren $2\,\%$ Zinsen.
- Bei Sparvertrag C erhalten Sie im ersten Jahr $3\,\%$ und im zweiten Jahr $1\,\%$ Zinsen.

Welcher Vertrag ist für Sie am günstigsten? Oder sind sie alle gleich?

Ein typischer Fehler ist, hier das arithmetische Mittel für den Durchschnittszins zu verwenden. Da hier aber ein **multiplikatives Wachstum** vorliegt, muss man das geometrische Mittel verwenden!

Geometrischer Mittelwert

- Bei **Sparvertrag A** erhalten Sie im ersten Jahr $1\,\%$ und im zweiten Jahr $3\,\%$ Zinsen.
  Das ist im Mittel ein Faktor von $\sqrt{1{,}01 \cdot 1{,}03} = \sqrt{1{,}0403} \sim 1{,}019950979214197$
  Und damit etwas unter $2\,\%$.
- Bei **Sparvertrag B** erhalten Sie in beiden Jahren $2\,\%$ Zinsen.
  Das sind im Mittel $2\,\%$, wie man sich denken kann, aber auch du[illegible]ng
  $\sqrt{1{,}02 \cdot 1{,}02} = \sqrt{1{,}02^2} = 1{,}02$ erhält.

- Bei **Sparvertrag C** erhalten Sie im ersten Jahr $3\,\%$ und im zweiten Jahr $1\,\%$ Zinsen. Das ist im Mittel ein Faktor von $\sqrt{1{,}03 \cdot 1{,}01} = \sqrt{1{,}0403} \sim 1{,}019950979214197$ (wie oben!) und damit ebenfalls weniger als $2\,\%$.

Man sieht: Je ausgeglichener die Prozentsätze über die Jahre, desto höher ist der mittlere Zinssatz!

Das können sie sich für das Leben merken: Je ausgeglichener, desto effektiver. Ist auch beim Lernen so: Lieber jede Woche 1% Wissenszuwachs (also einen Faktor 1,01), als im Semester nix tun (Faktor 1) und dann in der letzten Woche alles aufholen wollen. Aber ich habe gut reden... ich schreibe ja keine Klausur.

Geometrischer Mittelwert

Der Geometrische Mittelwert mehrerer Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ ist die k-te Wurzel aus ihrem Produkt:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{geom}}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} a_i}$$

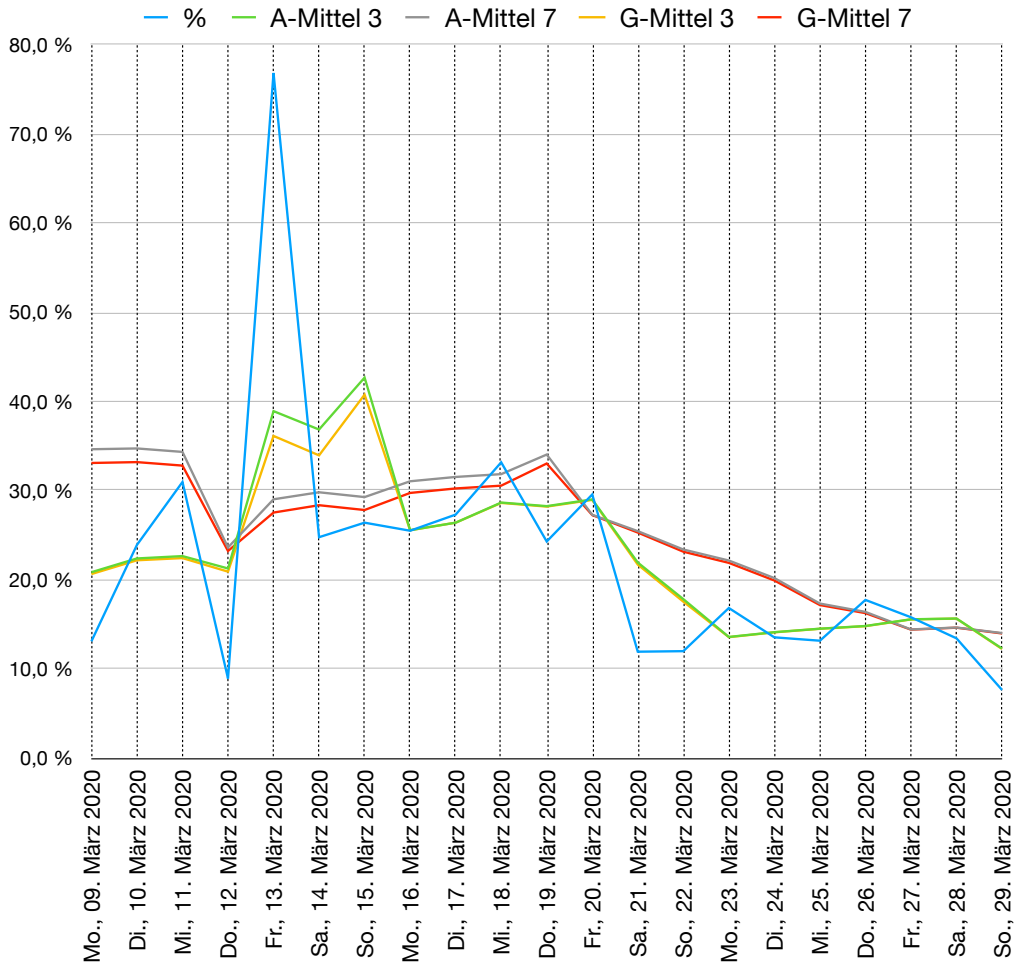
Auch für die Betrachtung von **Seuchen** ist das geometrische Mittel das Mittel der Wahl, da hier auch der prozentuale (oder relative) Zuwachs betrachtet wird.

Ein inzwischen bekanntes Problem ist, dass die Gesundheitsämter viele Fallzahlen nicht direkt melden, sondern erst mit Verzögerungen – besonders am Wochenende. Daher möchte man gerne den durchschnittlichen Zuwachs im Verlauf einer Woche berechnen.

Hier geht es aber nicht darum, wie viele neue Fälle durchschnittlich pro Tag absolut hinzugekommen sind, sondern darum, um welchen Faktor sich die Anzahl der Fälle pro Tag vergrößert hat.

COVID-19-Infektionen in Deutschland

Datum	Fälle	Faktor	%	A-Mittel 3	A-Mittel 7	G-Mittel 3	G-Mittel 7
Mo., 09. März 2020	1176	1,131	13,1 %	20,8 %	34,6 %	20,6 %	33,1 %
Di., 10. März 2020	1457	1,239	23,9 %	22,4 %	34,7 %	22,2 %	33,2 %
Mi., 11. März 2020	1908	1,310	31,0 %	22,6 %	34,3 %	22,4 %	32,8 %
Do., 12. März 2020	2078	1,089	8,9 %	21,3 %	23,6 %	20,9 %	23,2 %
Fr., 13. März 2020	3675	1,769	76,9 %	38,9 %	29,0 %	36,1 %	27,5 %
Sa., 14. März 2020	4585	1,248	24,8 %	36,8 %	29,8 %	33,9 %	28,4 %
So., 15. März 2020	5795	1,264	26,4 %	42,7 %	29,3 %	40,8 %	27,8 %
Mo., 16. März 2020	7272	1,255	25,5 %	25,5 %	31,0 %	25,5 %	29,7 %
Di., 17. März 2020	9257	1,273	27,3 %	26,4 %	31,5 %	26,4 %	30,2 %
Mi., 18. März 2020	12327	1,332	33,2 %	28,6 %	31,8 %	28,6 %	30,5 %
Do., 19. März 2020	15320	1,243	24,3 %	28,2 %	34,0 %	28,2 %	33,0 %
Fr., 20. März 2020	19848	1,296	29,6 %	29,0 %	27,3 %	28,9 %	27,2 %
Sa., 21. März 2020	22213	1,119	11,9 %	21,9 %	25,4 %	21,7 %	25,3 %
So., 22. März 2020	24873	1,120	12,0 %	17,8 %	23,4 %	17,5 %	23,1 %
Mo., 23. März 2020	29056	1,168	16,8 %	13,6 %	22,1 %	13,5 %	21,9 %
Di., 24. März 2020	32986	1,135	13,5 %	14,1 %	20,2 %	14,1 %	19,9 %
Mi., 25. März 2020	37323	1,131	13,1 %	14,5 %	17,3 %	14,5 %	17,1 %
Do., 26. März 2020	43938	1,177	17,7 %	14,8 %	16,4 %	14,8 %	16,2 %
Fr., 27. März 2020	50871	1,158	15,8 %	15,6 %	14,4 %	15,5 %	14,4 %
Sa., 28. März 2020	57695	1,134	13,4 %	15,6 %	14,6 %	15,6 %	14,6 %
So., 29. März 2020	62095	1,076	7,6 %	12,3 %	14,0 %	12,2 %	14,0 %

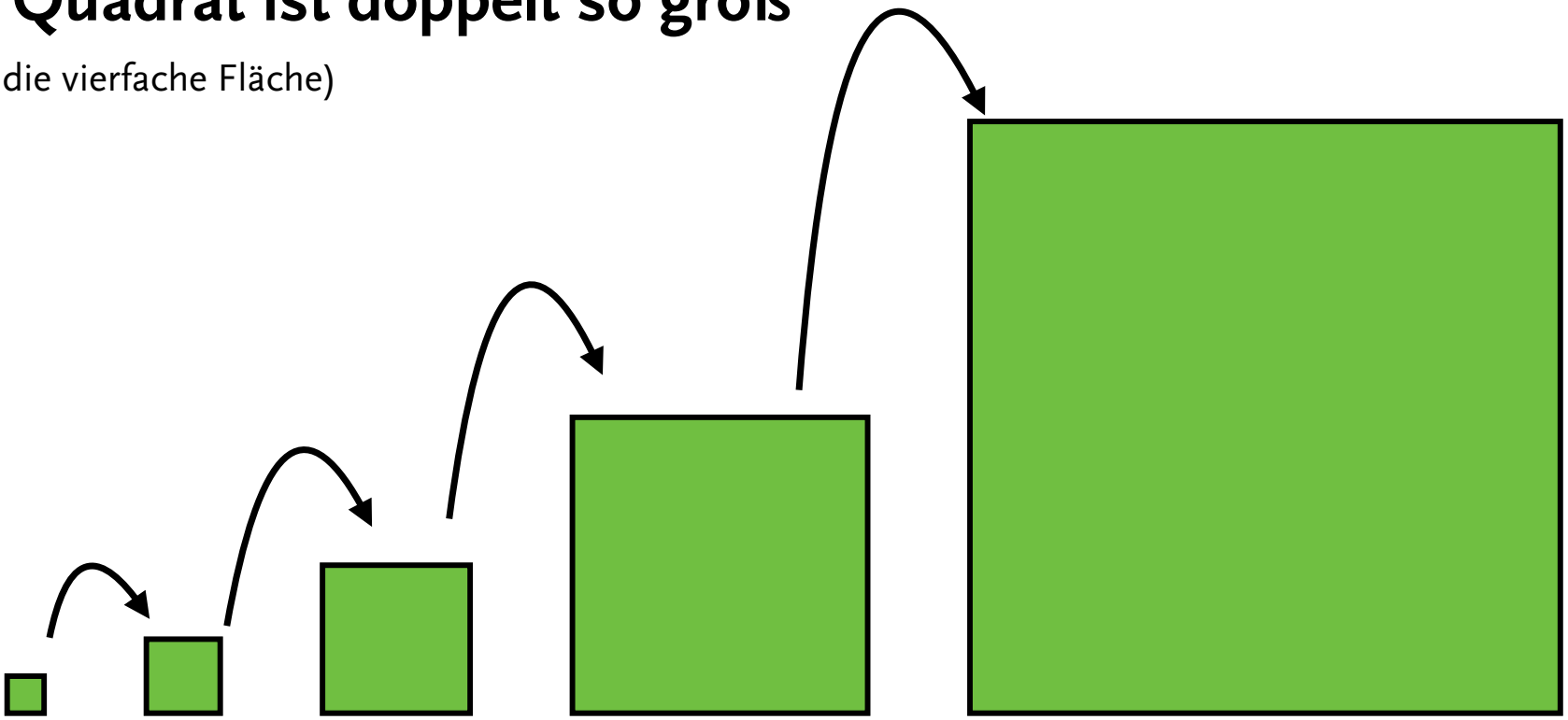


Multiplikation – Grundvorstellungen

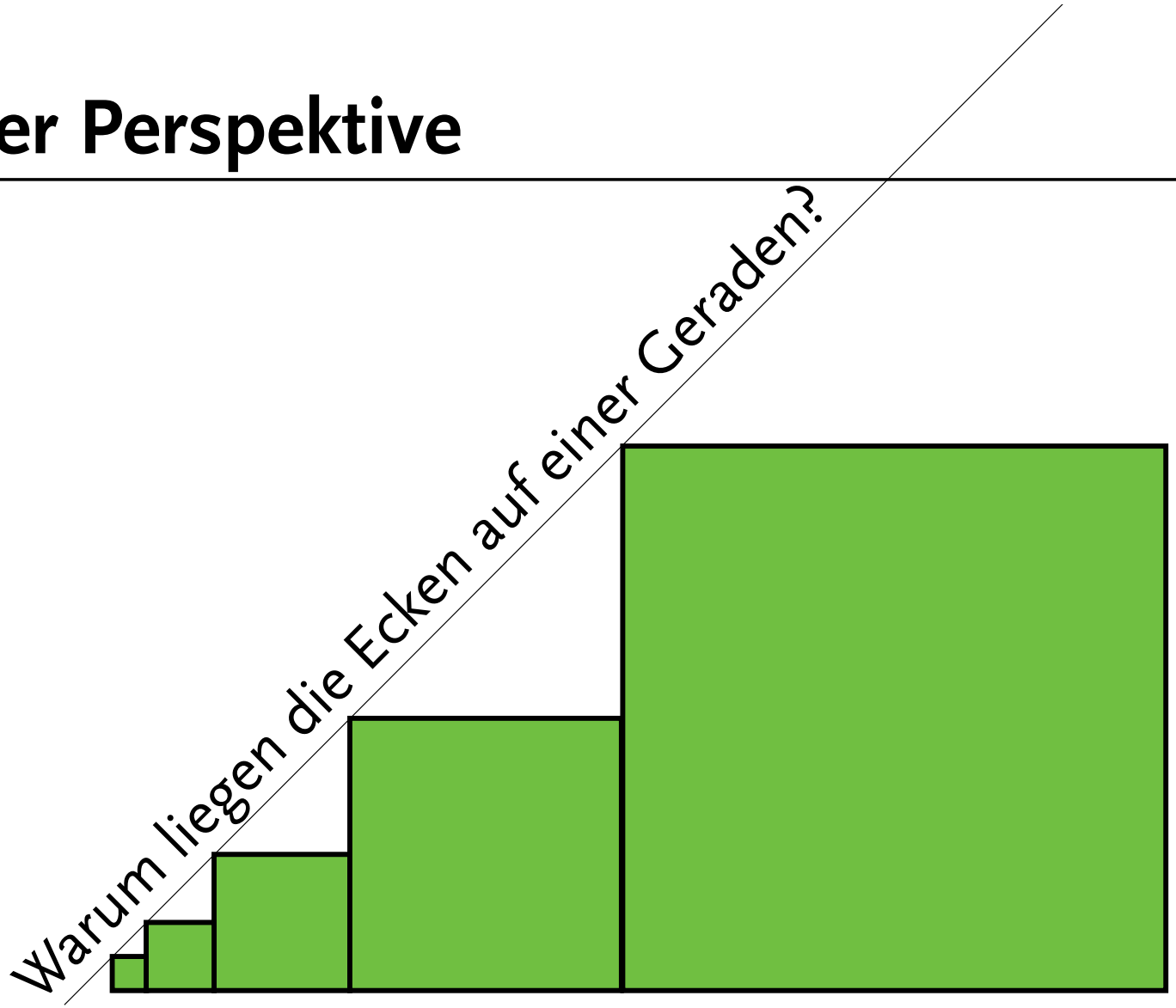
Wir verdoppeln die Seitenlänge:

- **Jedes Quadrat ist doppelt so groß**

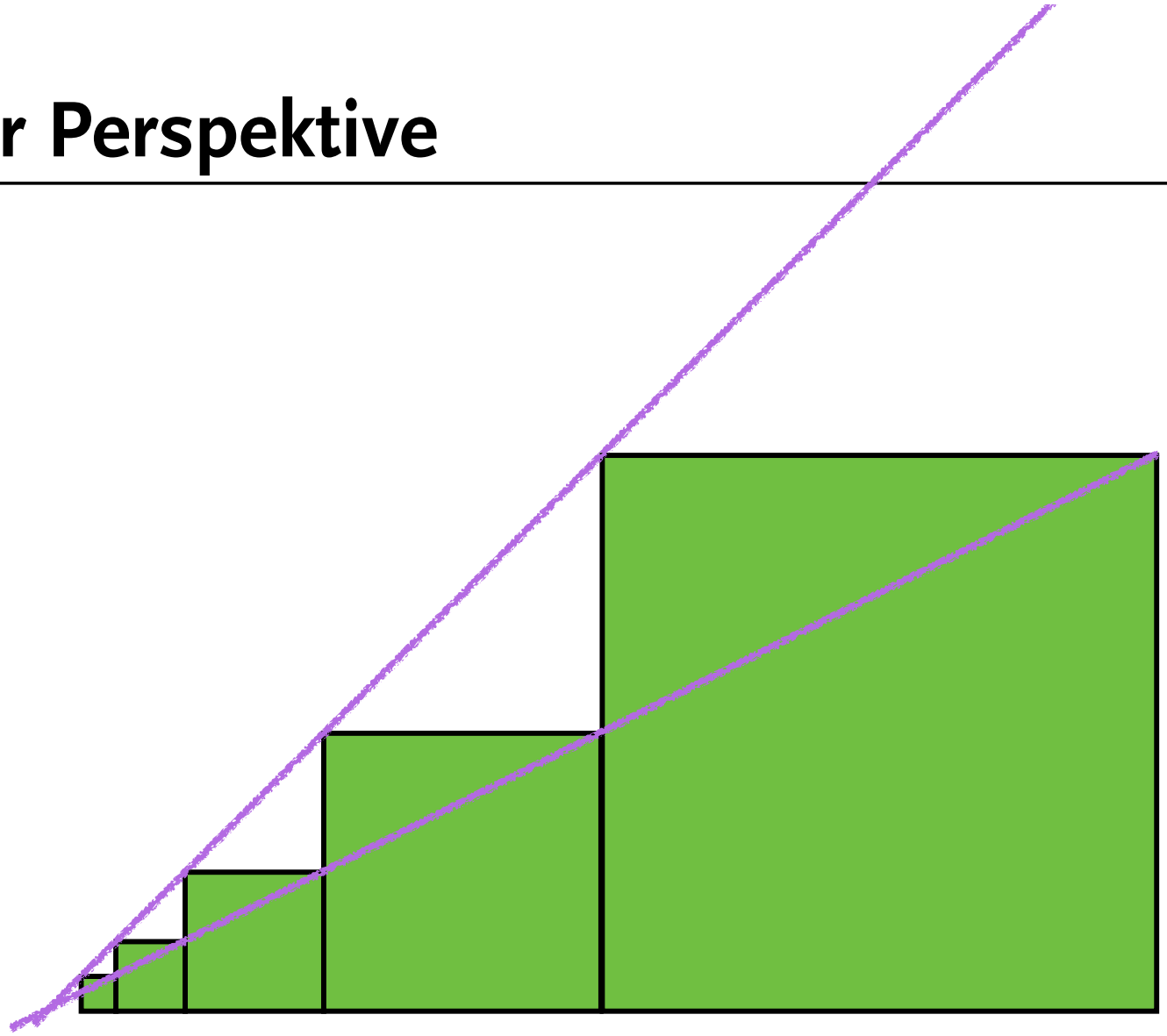
  (hat aber die vierfache Fläche)



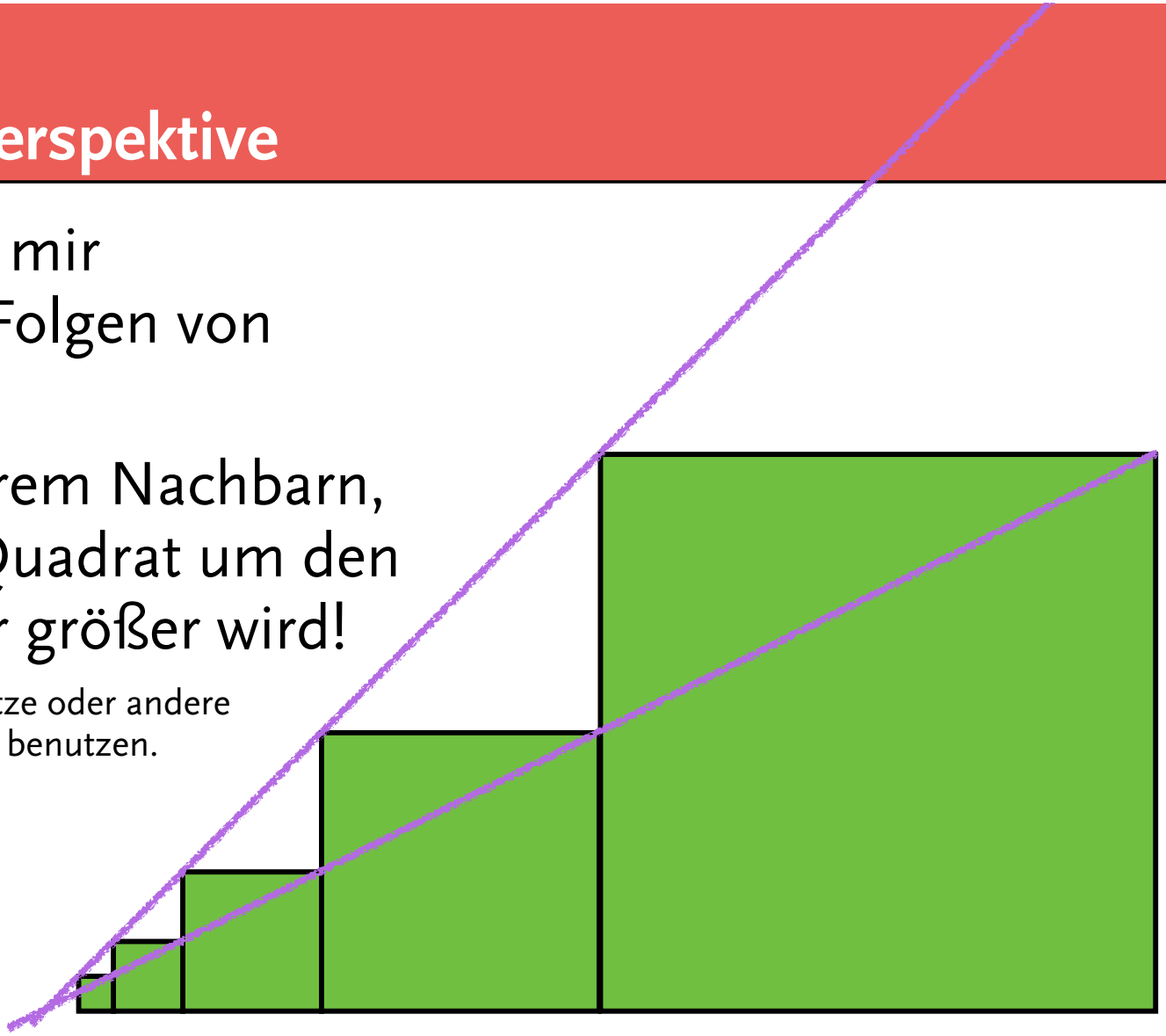
Eine Frage der Perspektive



Eine Frage der Perspektive



Eine Frage der Perspektive

- Finden Sie mit mir geometrische Folgen von Seitenlängen
- Erklären Sie ihrem Nachbarn, warum jedes Quadrat um den gleichen Faktor größer wird!

Sie dürfen die Strahlensätze oder andere geometrische Argumente benutzen.