Universität Potsdam

Arithmetik und ihre Didaktik

Von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die rationalen Zahlen

Wir definieren nun als **rationale Zahlen** $\mathbb{Q}$ die Menge aller Äquivalenzklassen $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\right] \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- Können wir $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ einbetten?
- Wie ist die Addition definiert?
- Wie ist die Multiplikation definiert?
- Gilt das Distributivgesetz?
- Gibt es ein neutrales Element der Multiplikation?
- Gibt es inverse Elemente bezügl. der Multiplikation?

Die rationalen Zahlen

Wir definieren nun als **rationale Zahlen** $\mathbb{Q}$ die Menge aller Äquivalenzklassen $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\right] \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- Wir können $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ via $z \mapsto \left[\left(\frac{z}{1}\right)\right]$ einbetten.
- $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\right] \oplus_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{c}{d}\right)\right] = \left[\left(\frac{ad+cb}{bd}\right)\right]$
- $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\right] \otimes_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{c}{d}\right)\right] = \left[\left(\frac{ac}{bd}\right)\right]$
- Gilt das Distributivgesetz? **Ja!**
- Neutrales Element: $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\right] \otimes_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1}{1}\right)\right] = \left[\left(\frac{a1}{b1}\right)\right] = \left[\left(\frac{a}{b}\right)\right]$
- Inverses („Kehrbruch”): $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\right] \otimes_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \left[\left(\frac{ab}{ba}\right)\right] = \left[\left(\frac{1}{1}\right)\right]$

Die Zahlen sind ein Körper

Eine Struktur, die bezüglich Addition **und** Multiplikation eine abelsche Gruppe ist und in der auch noch das Distributivgesetz gilt, nennt man **Körper** (engl.: Field). Jeder Körper ist natürlich auch ein Ring.

$(\mathbb{Q}, \oplus_{\mathbb{Q}}, \otimes_{\mathbb{Q}})$ ist ein solcher Körper.

Ab jetzt schreiben wir wieder normale Rechenzeichen!

(denn es ist ja eh alles dasselbe!)

Wir schreiben auch Brüche vereinfacht!

Statt $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\right]$ schreiben wir einfach $\frac{a}{b}$, statt $\left[\left(\frac{a}{1}\right)\right]$ schreiben wir a, statt $\left[\left(\frac{0}{b}\right)\right]$ schreiben wir 0, ...

(was ist mit 0,75?)

Was haben wir erreicht?

Wir haben jetzt **Zahlen** (die im übrigen immer noch durch Äquivalenzklassenbildung erzeugt werden), mit denen wir nicht nur **addieren** und **multiplizieren** können, *sondern* bei denen auch Gegenzahlen (Addition/Subtraktion) und inverse Zahlen (Multiplikation/Division) existieren!

Mit den Grundrechenarten können wir diesen Zahlenraum nicht mehr verlassen!